Probeklausur unter Abiturbedingungen • 13.2

für Dienstag, 3. März 2020 • 4 Unterrichtsstunden

Analysis • Lineare Algebra • Stochastik

Auswahlverfahren und Prüfungsablauf

Prüfungsteil 1 Vorschlag A ist ein Pflichtvorschlag aus drei Aufgaben. Nach Ablauf der Bearbeitungszeit von Prüfungsteil 1 (35 statt im Abitur 45 Minuten) geben Sie Vorschlag A und Ihre Bearbeitung von Vorschlag A ab.

im Abitur vier Aufgaben

Anschließend werden die Aufgabenvorschläge für Prüfungsteil 2 sowie die zugelassenen Hilfsmittel bereitgestellt und die Bearbeitungszeit von Prüfungsteil 2 beginnt.

Prüfungsteil 2 Aufgabe B zum Hypothesentest ist Pflicht (anders als im Abitur). Aus den Aufgabengruppe C wählen Sie zwei (der drei) Vorschläge zur Bearbeitung aus. Die nicht ausgewählten Vorschläge werden 45 (im Abitur 60) Minuten nach Beginn der Bearbeitungszeit ungültig gemacht.

Im Abitur auch Aufgabengruppe B. Dort sind B1/B2 Analysis, C1 Lineare Algebra und C2 Stochastik.

Prüfungsteil 1 • ohne Hilfsmittel

Vorschlag A

Analysis | Niveau 1

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - 1$. **5 Punkte**

a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass gilt: $\cancel{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0;2]$ einschließt.

Lineare Algebra | Niveau 1

2. Gegeben sind die Ebene $E: x - 2y - z = d$ und der Punkt $P(2|-1|-2)$. **5 Punkte**

a) Bestimmen Sie den Parameter d so, dass der Punkt P in E liegt.

b) Berechnen Sie die Länge des Ortsvektors $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ von P.

c) Begründen Sie kurz, dass der Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung kleiner sein kann als die in b) berechnete Länge.

Hinweis *In der Klausur gibt es nur* eine *hifsmittelfreie Aufgabe à 5 Punkte. Die zweite hier dient der Übung.*

Stochastik | Niveau 1

3. a) Bestimmen Sie a so, dass durch folgende Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben ist: **5 Punkte**

e_i	1	2	3	4	5
$P(e_i)$	0,25	0,1	$1/4$	a	0,15

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen ungeraden Ergebniswert.

c) Geben Sie das Gegenereignis von „höchstens 2“ als Teilmenge an.

Stochastik | Niveau 2

4. a) Entscheiden Sie begründet, ob bei passenden Wahrscheinlichkeitsfragen zum folgenden Fall eine binomialverteilte Rechnung angemessen ist: Aus einer Produktionslinie von Strohhalmen mit einem Ausstoß von 150 Stück pro Minute und einem durchschittlichen Ausschuss von 0,3 % werden im Verlauf einer Stunde 50 Prüfexemplare entnommen. **5 Punkte**

b) Beschreiben Sie das Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet wird, und bezeichnen Sie dieses zudem mit gängigen mathematischen Symbolen.

$$P(E) = \sum_{k=0}^{6} \binom{20}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{20-k}$$

GK

Prüfungsteil 2 • mit Hilfsmitteln

Auswahlverfahren im Prüfungsteil 2

Prüfungsteil 2 Aufgabe B zum Hypothesentest ist Pflicht (anders als im Abitur). Aus den Aufgabengruppe C wählen Sie zwei (der drei) Vorschläge zur Bearbeitung aus. Die nicht ausgewählten Vorschläge werden 45 (im Abitur 60) Minuten nach Beginn der Bearbeitungszeit ungültig gemacht.

Im Abitur auch Aufgabengruppe B. Dort sind B1/B2 Analysis, C1 Lineare Algebra und C2 Stochastik.

Vorschlag B | Stochastik – Hypothesentest | Pflichtaufgabe

Ein Saatguthersteller bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Bisher lag die Keimfähigkeit für Samenkörner der Qualitätsstufe B bei 70 % gegenüber einer deutlich höheren Rate von 95 % in Qualitätsstufe A. Der Hersteller wirbt nun damit, die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B durch eine Weiterentwicklung auf deutlich über 70 % gesteigert zu haben. Ein Großhändler möchte diese Behauptung testen und sät dazu 100 zufällig entnommene Samenkörner der Qualitätsstufe B.

1. Formulieren Sie die Hypothesen für diesen Test. **2 Punkte**

2. Entwickeln Sie eine Entscheidungsregel für den Test auf einem Signifikanzniveau von 5 %. **6 Punkte**

3. Der Großhändler entscheidet sich, die Behauptung des Herstellers abzulehnen, falls höchstens 75 Samenkörner keimen. Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit erster Art. **5 Punkte**

4. Formulieren Sie den Fehler zweiter Art in diesem Sachzusammenhang. **2 Punkte**

Vorschlag C1 | Analysis | Wahlmöglichkeit

nach Landesabitur 2019 • B2

Eine Brauerei stellt Fassbrause (Limonade aus Malzextrakt mit Kräuterzusätzen) und alkoholfreies Bier her.

Die Entwicklung der wöchentlichen Produktionsmenge der Fassbrause über das Jahr hinweg lässt sich für das vergangene Jahr näherungsweise durch die Funktion f mit

$$f(t) = 18 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{200}(t-26)^2} + 10$$

auf dem Intervall $[0;52]$ modellieren. Hierbei gibt t die Zeit in Wochen seit Jahresbeginn an; $f(t)$ beschreibt die wöchentliche Produktionsmenge in $\mathrm{m}^3/\text{Woche}$.

Der Graph von f ist im Material abgebildet.

1. Zeigen Sie rechnerisch, dass für f' gilt: **4 Punkte**

$$f'(t) = 0{,}18 \cdot (t-26) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{200}(t-26)^2}$$

2. Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f. Die Untersuchung der notwendigen Bedingung ist ausreichend. **5 Punkte**

3. Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass die wöchentliche Produktionsmenge den Wert von $28\,\mathrm{m}^3/\text{Woche}$ nicht überschreitet. **3 Punkte**

4. Es gilt $f''(36) = 0$. Deuten Sie dies im Sachzusammenhang. **3 Punkte**

Für das vergangene Jahr soll die wöchentliche Produktionsmenge des alkoholfreien Biers in $\mathrm{m}^3/\text{Woche}$ zum Zeitpunkt t in Wochen seit Jahresbeginn durch eine quadratische Funktion g auf dem Intervall $[0;52]$ beschrieben werden. Zu Beginn des Jahres betrug die wöchentliche Produktionsmenge $7\,\mathrm{m}^3/\text{Woche}$. Zum Zeitpunkt $t = 30$ Wochen wurde mit $25\,\mathrm{m}^3/\text{Woche}$ die größte wöchentliche Produktionsmenge des alkoholfreien Biers erreicht.

5. Leiten Sie die Funktionsgleichung von g her und zeigen Sie, dass gilt: **7 Punkte**

$$g(t) = -0{,}02t^2 + 1{,}2t + 7$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von g in das Koordinatensystem im Material.

GK

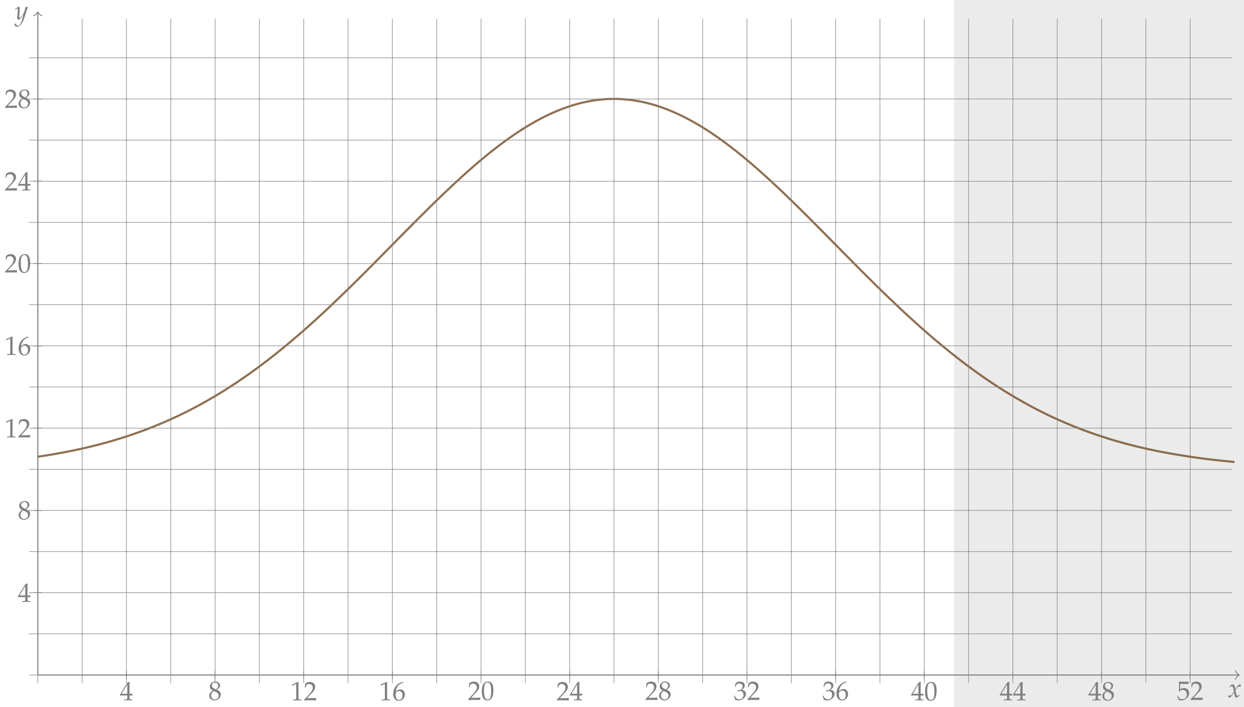
6. Der Marketingberater der Brauerei trifft die folgenden Aussagen: **8 Punkte**

- „Die Differenz zwischen der größten und der kleinsten wöchentlichen Produktionsmenge der Fassbrause und die entsprechende Differenz für das alkoholfreie Bier unterscheiden sich um weniger als 1 m^3/Woche."
- „Die Gesamtproduktion der Fassbrause innerhalb des vergangenen Jahres in m^3 war größer als die des alkoholfreien Biers."
- „In der Nachbarbrauerei beträgt die Gesamtproduktion des alkoholfreien Biers pro Jahr mehr als 1 000 000 Liter. Um dies zu erreichen, müssten wir unsere Produktion deutlich steigern."

Prüfen Sie die Aussagen des Beraters.

Material

wöchentliche Produktionsmenge in m^3/Woche



Vorschlag C2 | Lineare Algebra | Wahlmöglichkeit

Landesabitur 2016 • B2

In Rom am Piazzale Ostiense steht nach ägyptischem Vorbild die 40 m hohe Cestius-Pyramide (Material 1 und 2). Die Seitenlängen der quadratischen Grundfläche ABCD betragen 30 m. Die Spitze der Pyramide liegt in $S(15|15|40)$ (alle Angaben in Metern).

1. Geben Sie die Skalierung der Achsen des Koordinatensystems in Material 2 und die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und D an. **5 Punkte**

2. Ermitteln Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Pyramidenfläche CDS liegt. **5 Punkte**

Zur Kontrolle: eine mögliche Koordinatengleichung von E ist

$$8y + 3z = 240$$

3. Zur Säuberung der teilweise mit Moos und Unkraut bewachsenen Pyramide muss ein Gebäudereiniger an den Seitenflächen hochsteigen. Bei Gebäudeflächen mit einer Neigung von mehr als 60°darf er diese nur mit Sicherung besteigen. – Entscheiden Sie durch eine geeignete Rechnung, ob hier eine solche Sicherung notwendig ist. **4 Punkte**

4. Die Strahlen der Vormittagssonne fallen zu einem bestimmten Zeitpunkt in Richtung des Vektors **4 Punkte**

$$\vec{s}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

auf die Pyramide. Eine Touristin sitzt zu diesem Zeitpunkt gegenüber der Pyramide in einem Café. Eines ihrer Augen befindet sich im Punkt $T(24{,}75|34{,}5|1)$. – Bestätigen Sie durch eine geeignete Rechnung, dass der Schatten der Pyramidenspitze genau in dieses Auge fällt.

5. Um die Mittagszeit fallen die Sonnenstrahlen nun in Richtung des Vektors **6 Punkte**

$$\vec{s}_M = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -20 \end{pmatrix}$$

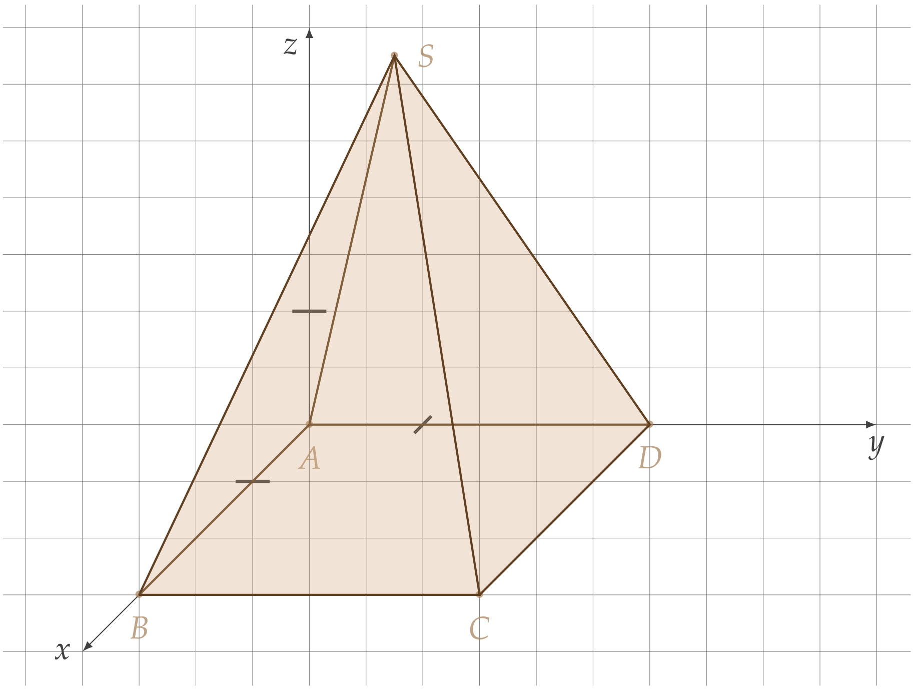
auf die Cestius-Pyramide. – Zeigen Sie rechnerisch, dass zu diesem Zeitpunkt die Pyramide keinen Schatten spenden kann.

6. Zur Überprüfung der Stabilität des Gesteins der Pyramide wird eine Probebohrung angeordnet. Dazu wird senkrecht zur Seitenfläche CDS eine Bohrung bis zum Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche durchgeführt. – Berechnen Sie den Punkt P auf der Seitenfläche CDS, in dem die Bohrung beginnen muss. – Bestimmen Sie die Länge des entstehenden Bohrkanals. **6 Punkte**

zur Kontrolle: Auf zwei Nachkommastellen gerundet ergibt sich $P(15|28{,}15|4{,}93)$.

Material 1 erstellt nach `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:2012-07-04_Piazzale_Ostiense.jpg` 28.2.2020

Material 2



Vorschlag C3 | Stochastik | Wahlmöglichkeit

Landesabitur 2015 • C

Ein Hubschrauber bringt während jeder Arbeitswoche (Montag bis Freitag) täglich eine Geschäftsfrau zu ihrem Arbeitsplatz. Bei Nebel am Startflughafen kann der Hubschrauber nicht starten. Aufgrund langjähriger Erfahrung weiß man, dass im Winter ein Sechstel aller Tage neblig sind.

1. Nennen Sie die Voraussetzungen, unter denen man das Auftreten von Nebel an mehreren aufeinanderfolgenden Tagen im Winter als Bernoulli-Kette interpretieren kann. Berechnen Sie unter Annahme dieser Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Arbeitswoche im Winter alle fünf Tage nebelfrei sind. **6 Punkte**

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschäftsfrau aufgrund des Nebels an höchstens 10 von 50 Arbeitstagen im Winter nicht mit dem Hubschrauber reisen kann. **3 Punkte**

3. Ein Klimaforscher vermutet, dass sich der Anteil der Nebeltage im Winter in den letzten Jahren gegenüber dem angegebenen Erfahrungswert von einem Sechstel verringert hat. Er führt daher einen Hypothesentest durch mit **6 Punkte**

$$H_0:\ p \geqslant {}^1\!/_6 \quad \text{und} \quad H_1:\ p < {}^1\!/_6.$$

Er notiert, ob es an 100 zufällig ausgewählten Wintertagen der letzten Jahre neblig war. Zu seinem Bedauern kann er seine Theorie durch die Untersuchung auf einem 5 %-Signifikanzniveau nicht bestätigen.

Ermitteln Sie, wie viele Nebeltage der Klimaforscher im Beobachtungszeitraum mindestens gezählt hat, und erklären Sie die Bedeutung des Fehlers 2. Art im Sachzusammenhang.

4. Es muss also auch im Weiteren davon ausgegangen werden, dass der Anteil der Nebeltage im Winter ein Sechstel beträgt. Durch seine Beobachtungen hat der Klimaforscher jedoch festgestellt, dass auf einen Nebeltag mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % ein weiterer Nebeltag folgt. Auf einen nebelfreien Tag folgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % wieder ein nebelfreier Tag. **5 Punkte**

An einem Freitag im Winter ist es neblig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es am darauf folgenden Montag nach dem Wochenende auch neblig ist. Zeichnen Sie dazu ein Baumdiagramm.

GK

5. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der neuen Erkenntnisse des Klimaforschers über die Wetterzusammenhänge die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses aus Aufgabe 1 neu. Vergleichen Sie die Ansätze der beiden Berechnungen und erklären Sie die Unterschiede. **6 Punkte**

6. Der Klimaforscher nimmt im Winter einige Tage Urlaub. Am ersten Urlaubstag ist es neblig. Der Klimaforscher berechnet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass alle folgenden Urlaubstage auch neblig sein werden, bei 6,25 % liegt. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Urlaubstage. **4 Punkte**

125 Punkte insgesamt